1. Übungsserie
Projektkurs Komplexe Zahlen

1. Bestimmen Sie für die 4 komplexen Zahlen $z_{1/2/3/4} = \pm 1 \pm i$ jeweils $iz + \frac{1}{z}$ und $z + \frac{i}{z}$!

2. Für welche komplexen Zahlen z gilt: $z^{-1} = z^*$?

3. Weisen Sie nach, dass die komplexe Zahl (1;0) das neutrale Element der Multiplikation ist und dass es genau ein neutrales Element der Multiplikation gibt!

4. Der italienische Mathematiker CARDANO (1501-1576) hat eine Lösungsformel für kubische Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$ gefunden.
Sie lautet: $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ und liefert eine (von maximal 3 möglichen) Lösung, falls die vorkommenden Quadratwurzeln existieren.
Dieser Lösungsansatz ist also z.B. für $x^3 - 6x + 4 = 0$ anscheinend unbrauchbar. Durch Probieren findet man aber eine Nullstelle $x_1 = 2$ und kann dann mithilfe einer Polynomdivision auch die beiden anderen Nullstellen $x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{3}$ erhalten.
Der Fall $x^3 - 6x + 4 = 0$ ging als „casus irreducibilis“ in die Geschichte der Mathematik ein.
BOMBELLI (1530-1572, italienischer Ingenieur und Autodidakt) erkannte 200 Jahre vor Euler, dass die CARDANOsche Gleichung auch für den „casus irreducibilis“ eine reelle Lösung liefert, wenn man imaginäre Zahlen zulässt.

   Bestimmen Sie auf diese Weise die Lösung x=2!

5. Berechnen Sie $\sqrt{i}$!