Für jedes a>0 ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = x \cdot \ln \frac{x^2}{a} \;;\; x \neq 0 .$$

Ihr Schaubild sei K_a.

a) Untersuchen Sie K_a auf Symmetrie, gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert von $f_a(x)$ für $x \to 0$.
Für jedes a>0 ist eine Funktion g_a gegeben durch

$$g_a(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{für } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f_a(x) & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob g_a an der Stelle x=0 differenzierbar ist.
Zeichnen Sie das Schaubild von g_1 im Bereich $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

c) Das Schaubild der Funktion g_a aus der Teilaufgabe b) und die x-Achse umschließen eine Fläche im vierten Feld.
Berechnen Sie mit Hilfe einer Grenzwertbetrachtung deren Inhalt.

d) P(u; v) sei ein Punkt von K_a im Bereich $0 < u < \sqrt{a}$.
Die Tangente in P an K_a schneidet die y-Achse im Punkt Q. Die Punkte P, Q und R(u;0) bilden ein Dreieck.
Für welches u ist dessen Flächeninhalt maximal?
Zeigen Sie, dass alle Dreiecke mit maximalen Flächeninhalt zueinander ähnlich sind.