Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl

Von den vorliegenden Aufgaben sind die Pflichtaufgaben P1, P2 und P3 zu lösen. Von den Wahlaufgaben W5, W6 und W7 sind 2 Aufgaben auszuwählen und vollständig zu bearbeiten.

Bearbeitungszeit

Die Arbeitszeit beträgt 300 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Auswahl der Wahlaufgaben.

Hilfsmittel

Tafelwerk
nichtprogrammierbarer und nichtgraphikfähiger Taschenrechner
Duden
Zeichengeräte
Die Tangentenbedingung lautet: $(x_M m + n - y_M)^2 = (1 + m^2)r^2$

Sonstiges

Die Lösungen sind in einer sprachlich einwandfreien und mathematisch exakten Form darzustellen.
Graphische Darstellungen müssen auf Millimeterpapier erfolgen.
Lösungswege müssen erkennbar sein.
Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa ¾ des erkennbar angestrebten Gesamtumfanges umfasst.

P1 Zahlenfolgen

1. Gegeben ist eine Zahlenfolge (s_n) durch $s_n = \frac{3n}{n+3}$ $(n \in \mathbb{N}; n \geq 1)$

1.1. Berechnen Sie die ersten 6 Glieder dieser Folge und stellen Sie die Folge für $1 \leq n \leq 6$ graphisch dar!

1.2. Weisen Sie durch eine exakte Monotonieuntersuchung nach, dass die Folge monoton wächst!

1.3. Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge (s_n)! Wie viele Glieder der Folge sind kleiner als 2,95?

1.4. Die Folge (s_n) ist Partialsummenfolge einer Zahlenfolge (a_n).

1.4.1. Begründen Sie, dass (a_n) eine Nullfolge sein muss!

1.4.2. Berechnen Sie a_1; a_2; a_3 und weisen Sie nach, das (a_n) weder eine arithmetische noch eine geometrische Zahlenfolge ist!

1.4.3. Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für das allgemeine Folgenglied der Folge (a_n) an!

P2 rationale Funktionen

2. Für jeden reellen Parameter t ist eine Funktion f_t gegeben durch:

$$f_t(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x + t; (x \in \mathbb{R})$$

Die Graphen von f_t heißen G_t.

2.1. Kurvendiskussion

2.1.1. Untersuchen Sie G_t auf Extrem- und Wendepunkte!

2.1.2. Für welchen Parameterwert t liegt der Hochpunkt von G_t auf der x-Achse?

2.1.3. Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_0 mit der x-Achse!

2.1.4 Zeichnen Sie G_0 für $-4 \leq x \leq 4$ mit 1 LE = 1 cm in ein Koordinatensystem!

2.2. Zeichnen Sie den Graphen H der Funktion $y = h(x) = \frac{1}{4}x^3$ in das schon bestehende Koordinatensystem!

2.3. H zerlegt die Fläche zwischen G_0 und der positiven x-Achse in zwei Teilflächen.
Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen!

P3 Geometrie des Raumes

3. Gegeben sind die Punkte
A(2;0;5), B(3;1;5), C(3;2;6), D(3;4;-1) und E(-3;-10;9).

3.1. Ermitteln Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene ε_1, die die Punkte A, B und C enthält!

3.2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene ε_1!

3.3. In welchem Punkt S durchstößt die Gerade DE die Ebene ε_1? Berechnen Sie den Winkel zwischen der Gerade DE und der Ebene ε_1!

3.4. Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε_2 an, die durch D geht und parallel zu ε_1 verläuft! Ermitteln Sie eine Gleichung einer Ebene ε_3 , die durch D geht und orthogonal zu ε_1 ist!

3.5. Gegeben sind die Ebenen

$$\varepsilon_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie a, b und c für den Fall, dass die Ebenen ε_4 und ε_5 identisch sind!

W4 rationale Funktionen

4. Für jede positive reelle Zahl a ist eine Funktion f_a in folgender Weise definiert: $y = f_a(x) = \frac{2}{a^4}x^3 - \frac{6}{a^2}x^2 + \left(\frac{36-a^2}{6}\right)x; \quad (a > 0)$.
Der Graph der Funktion f_a sei G_a.

4.1. Kurvendiskussion

4.1.1. Stellen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit vom Parameter a tabellarisch dar!

4.1.2. Bestimmen Sie die Extrem***stellen*** von G_a und weisen Sie die Art der Extrema nach!

4.1.3. Berechnen Sie die Koordinaten der Wende***punkte***!

4.1.4. Alle Wendepunkte liegen auf einer Kurve. Geben Sie die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte an!

4.1.5. Stellen Sie die Funktionen f_2 und f_3 in einem gemeinsamen Koordinatensystem graphisch dar!

4.2. Stellen Sie die Schargleichung der Wendetangenten auf und weisen Sie nach, dass sich alle Wendetangenten in einem gemeinsamen Punkt S schneiden!

4.3. Bestimmen Sie denjenigen Parameterwert a*, für den der Wendepunkt des Graphen G_{a^*} mit S zusammenfällt!

4.4. Zeigen Sie, dass die Wendetangente des Graphen G_{a^*} gleichzeitig Tangente in S an die Ortskurve der Wendepunkte ist!

W5 nichtrationale Funktionen

5. Gegeben sind die Funktionen

$$y = f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right),$$

$$y = g(x) = \frac{1}{2}e^{x} \text{ und}$$

$$y = h(x) = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

5.1. Kurvendiskussion

5.1.1. Weisen Sie nach, dass die Funktion f keine Nullstellen besitzt.

5.1.2. Berechnen Sie die Koordinaten des einzigen Extrempunktes des Graphen von f, weisen Sie die Art des Extremums nach und zeigen Sie durch eine Monotoniebetrachtung, dass dieser Extrempunkt das <u>absolute</u> Minimum ist.

5.1.3. Prüfen Sie den Graphen von f auf Wendepunkte!

5.1.4. Bestimmen Sie rechnerisch die Art der Symmetrie des Graphen von f!

5.1.5. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f, g und h für $-2 \le x \le 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem (1 LE: 2 cm)!

5.2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, der von den Graphen der Funktionen f, g und h sowie von den Geraden $x = -1$ und $x = 2$ vollständig eingeschlossen wird.

5.3. Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen f und g im Intervall $0 \le x \le t$ wird als A(t) bezeichnet.

5.3.1. Berechnen Sie A(1) und A(10).

5.3.2. Geben Sie eine allgemeine Gleichung für A(t) an!

5.3.3. Berechnen Sie $\lim_{t \to \infty} A(t)$!

5.4. Gegeben ist die Funktion $y = k(x) = x^2 + 1$.

5.4.1. Ermitteln Sie mithilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens die Koordinaten des Schnittpunktes im ersten Quadranten der Graphen von f und k auf zwei Dezimalen genau!

5.4.2. Geben Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte mit einer Genauigkeit von null Nachkommastellen an!

5.4.3. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen von f und k vollständig begrenzen. (Für die Schnittpunkte reicht die Genauigkeit von null Nachkommastellen)

W6 Geometrie der Ebene

6. Gegeben ist ein bei A rechtwinkliges Dreieck ABC durch folgende Angaben:
Die Hypotenuse $\overline{BC}$ ist gegeben durch B(8;-2) und C(-4;4),
Die Kathete $\overline{AC}$ hat die Länge 6 LE,
Die Kathete $\overline{AB}$ hat die Länge 8 LE.

6.1. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A, indem Sie die notwendigen Konstruktionsschritte rechnerisch nachvollziehen! *Kontrolle A(-4;-2)*

6.2. Geben Sie eine Gleichung für den Umkreis k_u des Dreiecks ABC an!

6.3. Weisen Sie nach, dass der Kreis $(x+2)^2 + y^2 = 4$ Inkreis des Dreiecks ABC ist! *(Dreiecksseiten müssen Tangenten sein!)*

6.4. Gegeben ist eine Schar Kreise k_r durch $x^2 - 12x + y^2 - 18y + 117 = r^2$.

6.4.1. Für welche r haben die Kreise k_u und k_r keinen, genau einen, zwei gemeinsame Punkte?

6.4.2. Geben Sie die Koordinaten der Berührungspunkte für die Fälle an, dass k_u und k_r genau einen gemeinsamen Punkt besitzen!

6.5. Bestimmen jeweils das Maximum von Flächeninhalt und Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenusenlänge 10 cm! *(Extremwertaufgabe)*
Auf den Nachweis der Maxima wird verzichtet!

6.5.1. Für Berechnung von Umkreisradius und Inkreisradius gelten folgende Formeln:

$$r_u = \frac{abc}{4A}; \quad r_i = \frac{2A}{u} \text{ (A - Flächeninhalt, u - Umfang)}$$

Der Inkreisradius erreicht sein Maximum bei ebendiesen Maximalwerten von Flächeninhalt und Umfang.
Wieviel Prozent des Flächeninhaltes des Umkreises kann der Flächeninhalt des Inkreises eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenusenlänge 10 cm maximal betragen?