5. Kurzkontrolle Mathematik Leistungskurs 12

1. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x;\quad x \in \mathrm{IR}$.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Extrem- und Wendepunkte! Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie! Fertigen Sie eine Skizze an!

2. Gegeben ist die Funktionenschar $y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^4 + x^3;\quad x,t \in \mathrm{IR}; t > 1$.

2.1. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Extrem- und Wendepunkte!

2.2. Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie!

2.3. Stellen Sie die Graphen der Funktionen für $t = 1;2;3$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem graphisch dar!

2.4. Bestimmen Sie die Schargleichung der Wendetangenten!

2.5. Bestimmen Sie die Ortskurven der Minima und der Wendepunkte und zeichnen Sie die Graphen der beiden Ortskurven in das schon vorhandene Koordinatensystem!

Z1 Gegeben ist eine im Intervall [a;b] beliebig oft differenzierbare Funktion f(x), die die Differentialgleichung $f'(x) = f^2(x) + 1$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass f im Intervall [a;b] keine Extremstellen besitzt!

Zeigen Sie: Besitzt f im Intervall [a;b] eine Nullstelle, so fällt diese mit einer Wendestelle von f zusammen.

Zeigen Sie, dass die Funktion tanx für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ die Differentialgleichung erfüllt!

Z2 Die Schnittpunkte mit der x-Achse und das lokale Minimum der Funktion

$$y = f_t(x) = (x-t)^3 \cdot (x+t)^2;\quad x,t \in \mathrm{IR}; t > 0$$

bilden für jedes t ein Dreieck.

Berechnen Sie den exakten Wert des Flächeninhalts des Dreiecks!

$$\left(\text{Zur Kontrolle}: A = \frac{3456}{3125}t^6 \text{ FE}\right)$$

Z3 Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist gegeben durch folgende Angaben:
- eine Nullstelle ist -1
- die Wendestelle ist -2
- die Gleichung der Wendetangente lautet $y = 3x + 3{,}5$

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion

Z4 Zeichnet man in einem **Flachpunkt** die Tangente an den Graphen der Funktion f, so verläuft die Kurve sehr lange dicht entlang der Tangente, ist also wenig gekrümmt. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit ein Flachpunkt vorliegt?
Untersuchen Sie die Funktion $y = f(x) = x^4 - 8x$ auf Flachpunkte!
(Flachpunkte sind eher sinnlos, denn die Funktion kann auch ohne Vorliegen eines Flachpunktes lange dicht entlang der Tangente verlaufen!)