Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl:

Die Arbeit besteht aus einem Pflichtteil und einem Wahlteil.
Von den Pflichtaufgaben **P1** und **P2** ist eine auszuwählen und vollständig zu bearbeiten.
Von den vier Wahlaufgaben **W1** bis **W4** sind zwei auszuwählen und zu lösen.
Wurde im Pflichtteil die Aufgabe **P2** gewählt, muss im Wahlteil mindestens eine der Aufgaben **W3 oder W4** gewählt werden.
Bei der Bearbeitung von mehr als zwei Wahlaufgaben werden die beiden Aufgaben gewertet, die zusammen die größte Punktzahl ergeben.

Bearbeitungszeit:

Die Arbeitszeit beträgt 300 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl.

Hilfsmittel:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner ohne CAS
- Zeichengeräte
- Duden (Die deutsche Rechtschreibung)

Hinweis:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen

In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa Dreiviertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges:

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganter, kreativer und rationeller Lösung,
- vollständiger Lösung einer dritten Wahlaufgabe.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Verstößen gegen mathematische Korrektheit und äußere Form abgezogen werden.

P1 Analysis, analytische Geometrie, Stochastik

1.1 Gegeben ist eine Funktion durch $y = f(x) = -\frac{18}{x}(1 - \ln(9x));\quad x \in D_f$.
Ihr Graph sei F.

1.1.1 Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D_f der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an den Grenzen des Definitionsbereiches!

1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von F mit den Koordinatenachsen, und die Koordinaten des Extrempunktes von F!

1.1.3 Weisen Sie nach, dass durch $y = 9 \cdot (\ln(9x) - 1)^2$ eine Stammfunktion von f gegeben ist!

1.1.4 Der Graph der Funktion, die x-Achse und die Gerade $x = z$ $(z>1)$ schließen eine Fläche vollständig ein.

1.1.4.1 Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche für $z = 10$.

1.1.4.2 Bestimmen Sie z so, dass der Flächeninhalt 225 FE groß wird.

1.2 Gegeben sind die Punkte A(2|4|1), B(4|-1|2) und C_a(a|a|5) mit $a \in \mathbb{R}$.

1.2.1 Die Punkte A, B und C_1 bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks und stellen Sie es graphisch dar!

1.2.2 Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene an, in der das Dreieck ABC_1 liegt!

1.2.3 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch A und B verläuft! Prüfen Sie ob es ein a gibt, sodass der Punkt C_a auf g liegt!

1.3 Beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht“ darf man bei einer erwürfelten Sechs eine Figur ins Spiel bringen. Dazu hat man maximal 3 Versuche.

1.3.1 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Versuche an, unabhängig davon, ob man ins Spiel kommt oder nicht.
Weisen Sie nach, dass durch die Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gegeben ist. Nutzen Sie ein Baumdiagramm!

X	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

1.3.2 Ermitteln Sie Erwartungswert und Varianz von X!
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis!

1.3.3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nach maximal 3 Würfen ins Spiel zu kommen?

1.3.4 Wie oft müsste man würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% ins Spiel zu kommen?

P2 Analysis

2. Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{a}{4}x^2, \quad x, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.1 Bestimmen Sie für die Graphen von f_a die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachen, der Extrempunkte und der Wendepunkte!
Geben Sie auch jeweils an, für welche a die entsprechenden Punkte existieren.
Zeichnen Sie die Graphen für a=-1 und für a=3 in ein gemeinsames Koordinatensystem!

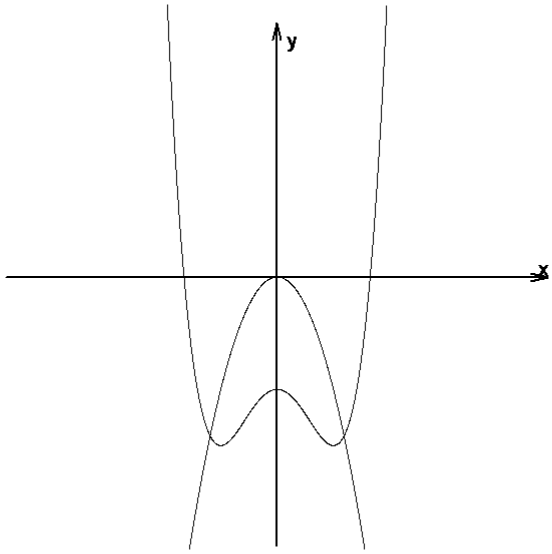
2.2 Alle Extrempunkte liegen auf einer Kurve. Geben Sie eine Gleichung dieser Ortskurve an!

2.3 Bestimmen Sie die Gleichungen derjenigen Ursprungsgeraden, die den Graphen von f_3 berühren!

2.4 Die Geraden x=1 und x=2 sowie die Graphen von f_3 und f_{-1} schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

2.5 Die Tangenten an f_{-1} in den Punkten A(-2|0) und B(2|0) bilden mit der Abszissenachse ein gleichschenkliges Dreieck.
Berechnen Sie die Größe der Basiswinkel sowie Flächeninhalt und Umfang dieses Dreiecks.

W1 Analysis



1.1 Gegeben sind die Funktionen g und h mit den Gleichungen
$g(x) = x^4 - 2x^2 - 2;\ \ x \in IR$ und
$h(x) = -2x^2;\ \ x \in IR$.
Die zugehörenden Graphen sind G und H (siehe Skizze).

1.1.1 Die Graphen G und H begrenzen eine Fläche vollständig. Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche!

1.1.2 An den Graphen G wird im Punkt $N\left(\frac{1}{2}; -\frac{39}{16}\right)$ die Normale n gelegt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an H, die zu n parallel verläuft!

1.2. Die Punkte A(-u|g(-u)), B(u|g(u)), C(u|h(u)) und D(-u|h(-u)) (u>0) bilden einen um die y-Achse rotierenden Kreiszylinder.

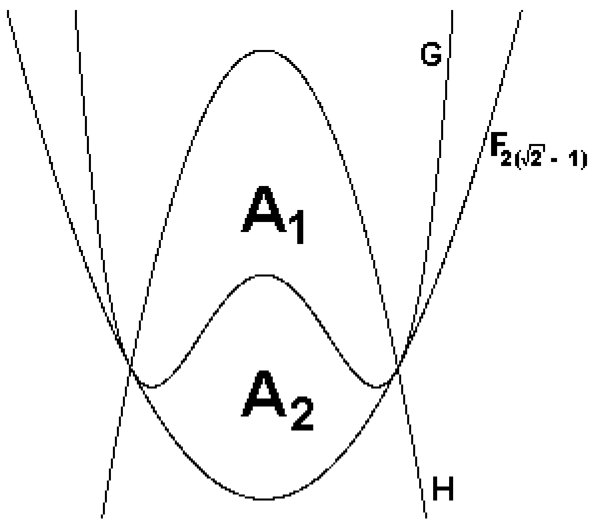
1.2.1. Bestimmen Sie u so, dass das Volumen des Zylinders ein lokales Maximum annimmt und geben Sie dieses maximale Volumen an!

1.3. Gegeben ist eine Parabelschar durch $f_k(x) = kx^2 - 4;\ \ k, x \in IR,\ \ k > 0$. Ihre Graphen seien F_k.

1.3.1 Weisen Sie nach, dass für $k = 2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$ F_k und G genau 2 gemeinsame Punkte besitzen und berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte!

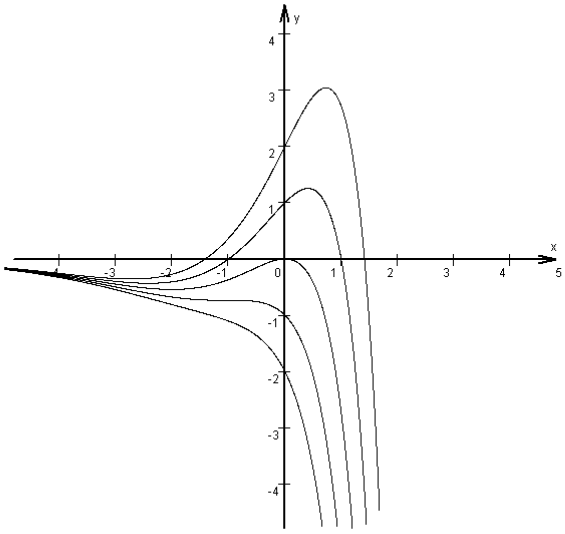
1.3.2 Bestätigen Sie, dass auch H durch diese Punkte läuft!

1.3.3 Bestimmen Sie das Verhältnis der Inhalte der Flächen A_1 und A_2!



W2 Analysis

2.1 Gegeben ist die Funktionenschar $y = f_t(x) = (t - x^2) \cdot e^x;\quad x, t \in IR$.
(siehe Skizze!)



2.1.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der Ordinatenachse!

2.1.2 Bestimmen Sie, für welche t es Null-, Extrem- bzw. Wendestellen gibt!

2.1.3 Weisen Sie nach, dass zwei verschiedene Funktionen der Schar keinen gemeinsamen Punkt besitzen!

2.2 Betrachtet wird jetzt die Funktion $f_2(x)$:

2.2.1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f_2(x)$!
(Kontrolle: $y = F_2(x) = (-x^2 + 2x) \cdot e^x$)

2.2.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_O, die von der Funktion $f_2(x)$ und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird!

2.2.3 Berechnen Sie den Inhalt der bis ins Unendliche reichenden Fläche A_U, die von der Funktion $f_2(x)$ und der x-Achse im 3. Quadranten eingeschlossen wird!

2.3 Weisen Sie nach, dass durch $F_t(x) = (-x^2 + 2x - 2 + t) \cdot e^x$ für jede Funktion der Schar eine Stammfunktion gegeben ist und bestimmen Sie dasjenige t, für das die Flächen $A_O(t)$ und $A_U(t)$ den selben Inhalt haben!

W3 analytische Geometrie

3. Gegeben ist die Ebene E_1 durch die Punkte B(4|4|1), C(3|3|4) und D(0|-5|3) sowie die Ebene E_2 durch den Punkt S(-16|-3|-3)
und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.1 Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Ebene E_2 durch den Punkt S und die Gerade g eindeutig bestimmt wird!

3.2 Stellen Sie für beide Ebenen eine Koordinatengleichung auf!

3.3 Bestimmen Sie Schnittgerade und Schnittwinkel der beiden Ebenen!

3.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes A, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ergibt! *(zur Kontrolle: A(1|-4|0))*

3.5 Berechnen Sie Volumen, Grundfläche und Höhe der Pyramide ABCDS!

3.6 Prüfen Sie rechnerisch, ob sich der Höhenfußpunkt F der Pyramide ABCDS innerhalb der Grundfläche ABCD befindet! *(zur Kontrolle: F(-1|-9|0))*

3.7 Stellen Sie die Pyramide ABCDS graphisch dar!

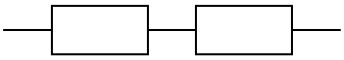
W4 Stochastik

4.1 Eine Firma stellt Widerstände für die Elektronikindustrie her. Die Ausschussquote beträgt 15%.

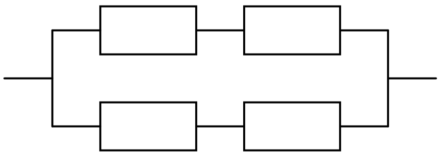
4.1.1 Der Produktion werden zufällig 20 Widerstände entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse!
A: genau 3 Widerstände sind unbrauchbar
B: höchstens 3 Widerstände sind unbrauchbar
C: mindestens 1 Widerstand ist unbrauchbar

4.1.2 Mit der Produktion zufällig entnommenen Widerständen werden folgende Schaltungen aufgebaut.

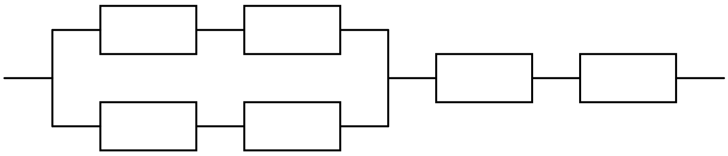
A



B

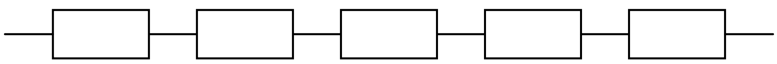


C



Mit welchen Wahrscheinlichkeiten funktionieren diese Schaltungen?
(Schaltung A funktioniert, wenn beide Widerstände einwandfrei sind; Schaltung B funktioniert, wenn einer der beiden Zweige funktioniert; Schaltung C funktioniert, wenn Schaltung A und Schaltung B funktionieren)

4.1.3 5 Widerstände, von denen genau einer defekt ist, werden in Reihe geschaltet. Um herauszufinden, welcher Widerstand defekt ist, werden die Widerstände einzeln der Reihe nach überprüft, bis feststeht, welcher der defekte ist.



Wieviele Einzelprüfungen sind dabei zu erwarten?

4.2 Die Firma erwirbt eine neue Produktionsanlage. Bei dieser beträgt die Ausschussquote nur noch 8%. Die Ausschussquote der alten Produktionsanlage beträgt weiterhin 15%. Die neue Produktionsanlage hat einen 30 %-igen Anteil an der Gesamtproduktion.

4.2.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig der Gesamtproduktion entnommener Widerstand unbrauchbar ist?

4.2.2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein unbrauchbarer Widerstand aus der neuen Produktionsanlage?

4.3 Die Widerstände werden zu je 1000 Stück in Kartons verpackt und als gute Qualität bzw. schlechte Qualität verkauft.

4.3.1 Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung für die zufällige Anzahl unbrauchbarer Widerstände in einem Karton guter Qualität!

4.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse!
In einem Karton guter Qualität befinden sich
A: höchstens 100 unbrauchbare Widerstände.
B: genau 100 unbrauchbare Widerstände.

4.3.3 Ein Karton lässt sich nicht zuordnen. Da dies immer wieder mal auftritt, wurde an dieser Firma ein Entscheidungsverfahren entwickelt.
Dem Karton werden zufällig 10 Widerstände entnommen. Sind davon mehr als 1 defekt, so wird der Karton als schlechte Qualität verkauft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Karton fälschlicherweise als gute Qualität zu verkaufen sowie dafür, den Karton fälschlicherweise als schlechte Qualität zu verkaufen!
Welche Rückschlüsse lassen die Ergebnisse auf die offensichtliche Strategie der Firma zu?

Tabellen der Binomialverteilung $B_{n;p}(X=k)$

k	**$B_{10;0,15}(X=k)$**	**$B_{10;0,08}(X=k)$**
0	0,19687	0,43439
1	0,34743	0,37773
2	0,27590	0,14781
3	0,12983	0,03427
4	0,04010	0,00522
5	0,00849	0,00054
6	0,00125	0,00004
7	0,00013	0,00000
8	0,00001	0,00000
9	0,00000	0,00000
10	0,00000	0,00000