

Pflichtaufgaben

P1. Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar durch:

$$f_a(x) = \frac{8a^3x^3 + 1}{8ax^2} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Graphen der Funktionen dieser Schar sind K_a .

- 1.1. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_a(x)$!
- 1.2. Wie lauten die Gleichungen aller Asymptoten von K_a ?
- 1.3. Untersuchen Sie Lage und Art des Extremums E! Besitzt K_a Wendepunkte?
- 1.4. Berechnen Sie die Fläche A_1 , zwischen K_a , der schiefen Asymptote, und den Geraden

$$x = \frac{1}{2} \text{ und } x = k \left(k > \frac{1}{2} \right) \text{ in Abhängigkeit von } a \text{ und } k!$$

(K_a verläuft in diesem Bereich oberhalb der schiefen Asymptote.)

Bestimmen Sie $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_1$!

- 1.5. Es sei $a = 1$. Zeichnen Sie K_1 im Bereich $[-5;5]$!
- 1.6. Die Fläche A_2 liegt zwischen K_1 , der x -Achse und der Geraden $x = -2$ im 3. Quadranten.

Kennzeichnen Sie A_2 in der graphischen Darstellung aus Aufgabe 1.6.!

Berechnen Sie A_2 !

P2. Geometrie

Im Raum wird ein Parallelogramm ABCD betrachtet. Zwei Eckpunkte A und B sowie der Mittelpunkt M des Parallelogramms haben in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $A(2;3;1)$, $B(-4;4;2)$ und $M(-3;1;3)$.

- 2.1. Ermitteln Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte C und D!
- 2.2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms!
- 2.3. Geben Sie eine Gleichung für die Ebene an, in der das Parallelogramm liegt! Weisen Sie nach, daß der Punkt $E(-3;1;-3)$ nicht in dieser Ebene liegt!
- 2.4. Durch den Punkt E verläuft eine Schar von Geraden mit folgender Gleichung:

$$g_a: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$$

- 2.4.1. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g_3 mit der Ebene des Parallelogramms!
- 2.4.2. Welche Gerade der Schar durchstößt die Ebene des Parallelogramms im Punkt B?
- 2.4.3. Wie muß a gewählt werden, damit die Gerade g_a parallel zur Ebene des Parallelogramms verläuft?

P3. Zahlenfolgen

- 3. Mit a_6 bzw. $b_6 = 243$ und a_4 bzw. $b_4 = 432$ sind zwei Glieder einer Zahlenfolge (a_n) bzw. (b_n) gegeben.
 - 3.1. Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift unter der Voraussetzung an, daß die zwei vorgegebenen Glieder Teile einer geometrischen Folge (a_n) bzw. Teile einer arithmetischen Folge (b_n) sind!
 - 3.2. Berechnen Sie a_{10} und b_{10} !
 - 3.3. Stellen Sie die Folgen (a_n) und (b_n) für $1 \leq n \leq 10$ graphisch dar!
 - 3.4. Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit!
 - 3.5. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten beider Folgen und ermitteln Sie für den Fall der Konvergenz das Glied, von dem an die Abweichung vom Grenzwert kleiner als 0,001 ist!