2. Klausur Mathematik
Leistungskurs Klasse 12

1. Zahlenfolgen

1.1. Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} y = f(x) &= -x^2 - 4x - 3 \quad \text{und} \\ y = g(x) &= -x - 1 \quad . \end{aligned}$$

1.1.1. Stellen Sie beide Funktionen in einem Koordinatensystem graphisch dar und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen!

1.2. Durch diese beiden Funktionen ist eine Zahlenfolge in folgender Weise definiert:

$$(a_n) = \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right); n \in \mathbb{N}; n \geq 1$$

1.2.1. Berechnen Sie die ersten 6 Folgenglieder der Zahlenfolge und weisen Sie nach, dass es sich um eine arithmetische Zahlenfolge handelt!

1.2.2. Geben Sie eine möglichst einfache explizite Bildungsvorschrift an!

1.3. (s_n) sei die Partialsummenfolge von (a_n)!

1.3.1. Berechnen Sie die ersten 6 Folgenglieder der Partialsummenfolge!

1.3.2. Begründen Sie, dass (s_n) divergent ist und berechnen Sie s_{111}!

1.3.3. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{s_n}{n^2}$!

1.4. (aus der SVZ vom 14.11.2001)

Falt-Problem	Lösung:
Lässt sich ein Bogen Papier, wenn er nur groß und dünn genug ist, 50mal falten? Gehen Sie einmal davon aus, der Papierbogen sei tausend Kilometer breit, ebenso lang und ein Zehntel Millimeter dick!	Die Frage kann eindeutig mit Nein beantwortet werden. Nach dem ersten Falten liegt das Papier doppelt, nach dem zweiten vierfach, nach dem dritten achtfach und ist nach dem siebten schon über einen Zentimeter dick. Nach 15 Faltungen haben die Papierlagen eine Höhe von 3,30 m. Beim 30. Falten ist der Papierberg jedoch schon über 100 km hoch, nach 40 Faltungen weit über 100 000 km und nach 50 Faltungen wäre man längst bei der Sonne angelangt. Die Grundfläche des Riesenpapiers hätte sich mittlerweile aber auf etwa einen Quadratmeter verkleinert.

1.4.1. Prüfen Sie die unterstrichenen Aussagen auf ihre Richtigkeit!

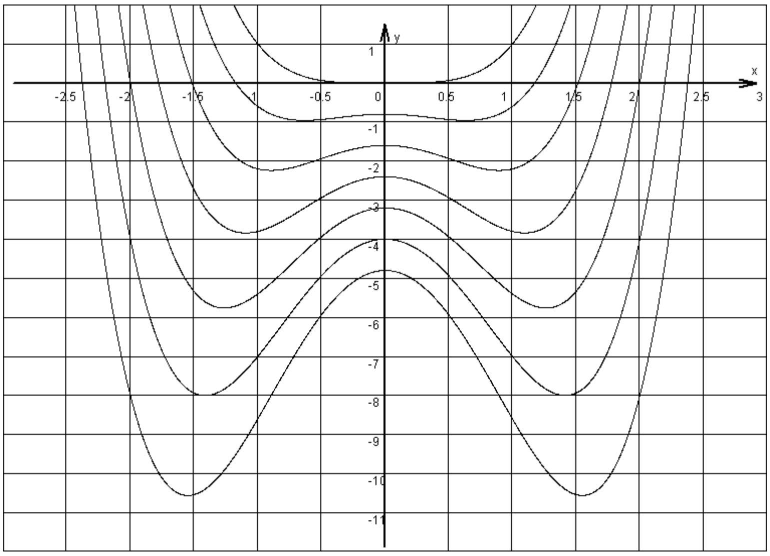
Differentialrechnung

2. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion (Symmetrie, Grenzwerte für x gegen +/- unendlich, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Skizze) für die Funktion $y = f(x) = \frac{2}{9}(x^3 + 5x^2 + 3x - 9)$ durch!

3. Für jeden nichtnegativen reellen Parameter t ist eine Funktion definiert durch:

$$y = f_t(x) = x^4 - t \cdot x^2 - t \qquad ; t \in \mathrm{IR}; t \geq 0$$

In nachfolgender Skizze sind einige Vertreter dieser Funktionenschar dargestellt.



3.1.1. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion (Symmetrie, Grenzwerte für x gegen +/- unendlich, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) für die Funktion $f_1(x) = x^4 - x^2 - 1$ durch!

3.1.2. Berechnen Sie die Gleichungen der beiden Wendetangenten von $f_1(x)$!

3.1.3. Stellen Sie $f_1(x)$ und die beiden Wendetangenten graphisch dar!

3.2. Welche der Funktionen verläuft durch den Punkt (1;-1)?

3.3. Welche der Funktionen hat die Nullstellen -2 und 2?

Z Alle Minima der Graphen der Schar liegen auf einer Kurve. Geben Sie die Gleichung der Kurve an!